CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE TPC

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Dans ce problème, E désigne l'espace vectoriel préhilbertien complexe des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, périodiques de période 2π et de classe $\mathcal{C}^\infty$, muni du produit scalaire $(f|g)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\overline{f(u)}g(u)du$.
Pour tout nombre entier relatif n, nous noterons e_n l'élément de E défini par $e_n(t)=e^{int}$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

I

Etant données deux fonctions f et g appartenant à E, on définit leur *produit de convolution* comme étant la fonction $f*g$ définie pour tout $t\in\mathbb{R}$ par :

$$(f*g)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(u)g(t-u)du\ .$$

1°) a) Montrer que $f*g$ est périodique de période 2π et que $g*f=f*g$.

b) Montrer que $f*g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et que la dérivée d'ordre $n\in\mathbb{N}$ de $f*g$ est $(f*g)^{(n)}=f*g^{(n)}=f^{(n)}*g$. On a donc $f*g\in E$.

2°) Montrer que pour tout triplet (f, g, h) d'éléments de E et tout couple (λ, μ) de nombres complexes, on a $f*(\lambda g+\mu h)=\lambda(f*g)+\mu(f*h)$.
Etant donnée une fonction $f\in E$, l'application ϕ_f de E dans E qui à tout $g\in E$ associe $f*g$ est donc un endomorphisme de E.

3°) Pour tout nombre réel a et toute fonction $f\in E$, on note $\tau_a(f)$ la fonction définie pour tout $t\in\mathbb{R}$ par $\tau_a(f)(t)=f(t-a)$.

a) Vérifier que $\tau_a(f)\in E$, et que l'application τ_a de E dans E est un endomorphisme de E.

b) Montrer que pour tout couple (f, g) d'éléments de E on a :

$$\tau_a(f*g)=\tau_a(f)*g=f*\tau_a(g)\ .$$

En déduire que les endomorphismes τ_a et ϕ_f de E commutent $(\tau_a\circ\phi_f=\phi_f\circ\tau_a)$.

On admettra sans démonstration que le produit de convolution sur E est associatif, c'est à dire que pour tout triplet (f, g, h) d'éléments de E on a $f*(g*h)=(f*g)*h$.

II

Etant donné $p \in \mathbb{N}$, soit E_p le sous-espace vectoriel de E engendré par les éléments e_n , avec $-p \leq n \leq p$.

1°) Vérifier que $(e_n)_{-p\leq n\leq p}$ est une base orthonormée de E_p .

Pour toute fonction $f \in E$, nous noterons dorénavant $S_p(f) = \sum_{n=-p}^{p}(e_n|f)e_n$ la projection orthogonale de f sur E_p .

2°) Montrer que E_p est stable par τ_a pour tout $a \in \mathbb{R}$.
On notera également τ_a la restriction de τ_a à E_p .

3°) Soit f une fonction appartenant à E .

a) Exprimer $f*e_n$ à l'aide de $(e_n|f)$ et de e_n .

b) En déduire que E_p est stable par ϕ_f .

On notera ψ_f la restriction de ϕ_f à E_p .

c) Expliciter les valeurs propres de l'endomorphisme ψ_f .

d) Déterminer l'endomorphisme ψ_f lorsque f appartient au sous-espace orthogonal à E_p dans E . Pour un élément quelconque f de E , comparer ψ_f et $\psi_{S_p(f)}$.

4°) Soit ψ un endomorphisme de E_p tel que l'on ait, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\tau_a \circ \psi = \psi \circ \tau_a$.

a) Montrer que la matrice représentative de ψ dans la base $(e_n)_{-p\leq n\leq p}$ de E_p est diagonale (on pourra par exemple appeler α_{kk} les coefficients de cette matrice et écrire l'égalité de $\tau_a \circ \psi(e_n)$ et $\psi \circ \tau_a(e_n)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$).
En déduire qu'il existe une unique fonction g appartenant à E_p , que l'on déterminera, telle que $\psi = \psi_g$.

b) Décrire l'ensemble des fonctions f appartenant à E telles que $\psi_f = \psi$.

III

Soit f une fonction appartenant à E . Nous noterons $c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$, les coefficients de Fourier de f . On rappelle que $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)e^{-int}dt = (e_n|f)$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a donc $S_p(f) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)e_n$, et nous noterons $S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n$ la somme de la série de Fourier de f , limite des $S_p(f)$ lorsque $p \to +\infty$.

1°) Justifier l'égalité $f = S(f)$.

2°) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ l'ensemble des sommes $\sum_{n=-p}^{p} |n|^m |c_n(f)|$, p parcourant $\mathbb{N}$, est majoré.

Nous admettrons pour la suite du problème le résultat suivant :

Etant donnée une famille $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes, la suite de fonctions $S_p = \sum_{n=-p}^{p} c_n e_n$ converge lorsque $p \to +\infty$ vers une fonction appartenant à E si et seulement si pour tout $m \in \mathbb{N}$ l'ensemble des sommes $\sum_{n=-p}^{p} |n|^m |c_n|$, p parcourant $\mathbb{N}$, est majoré.

3°) Soient f et g deux éléments de E. Montrer que les coefficients de Fourier de $f*g$ vérifient $c_n(f*g) = c_n(f)\, c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On pourra remarquer que pour tout $h \in E$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $(e_n|h) = (h*e_n)(0)$.

IV

On se propose dans cette partie d'étudier les solutions appartenant à E de l'équation intégrale suivante, appelée *équation de Fredholm* :

$$(1) \qquad x(t) - \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} A(t-u)x(u)du = B(t) \ ,$$

où A et B sont deux éléments donnés de E, λ un nombre complexe donné, et x une fonction inconnue.

Soient $S(A) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e_n$ et $S(B) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e_n$, avec $a_n = c_n(A)$ et $b_n = c_n(B)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les séries de Fourier respectives de A et B. On cherche les solutions de l'équation (1) sous forme de somme $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e_n$ d'une série de Fourier.

1°) Quelle relation doit lier les coefficients a_n, b_n et x_n pour tout $n \in \mathbb{Z}$ pour que la somme $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e_n$ soit solution de l'équation (1) .

2°) On suppose que $\lambda \neq \dfrac{1}{2\pi a_n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Calculer les coefficients x_n en fonction des a_n, b_n et de λ. Montrer que la suite de fonctions $S_p = \sum_{n=-p}^{p} x_n e_n$ converge bien vers une fonction x appartenant à E.

3°) On suppose qu'il existe q nombres entiers relatifs $n_1 < \ldots < n_q$ tels que l'on ait $a_{n_1} = \ldots = a_{n_q} = \dfrac{1}{2\pi\lambda}$. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) admette des solutions dans E est que $b_{n_1} = \ldots = b_{n_q} = 0$.
Lorsque cette condition est vérifiée, décrire l'ensemble des solutions de l'équation (1) .